www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Concours des 22, 23 et 24 mai 1989 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

***

MATHEMATIQUES

(Options M.P.T.)

(à distribuer aux candidats)

***

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants ; le candidat est libre de les traiter dans l'ordre de son choix.

1er PROBLEME

Notations

1) K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un K-espace vectoriel de dimension n, $(n \geqslant 2)$.

2) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, algèbre des endomorphismes de E, on pose $u^0 = Id_E$; $u^p = u^{p-1} \circ u$. $(p \in \mathbb{N}, p \geqslant 1)$.

3) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, π_u désigne le polynôme caractéristique de u .

4) C(u) désigne, pour u, élément de $\mathcal{L}(E)$, le commutant de u, c'est-à-dire l'ensemble des éléments v de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant : $v \circ u = u \circ v$.

5) K[X] désigne l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K.

Si P est élément de K[X] , $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on posera $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$.

6) $F_{u,x}$ désigne le sous espace vectoriel de E engendré par la famille de vecteurs $(u^p(x) / p \in \mathbb{N})$.

Définition : un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit cyclique si et seulement si il existe un vecteur x de E tel que : $E = F_{u,x}$.

I - 1°)a) Montrer que $F_{u,x}$ est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant x et stable par u .

b) Lorsque x est vecteur propre de u, quelle est la dimension de $F_{u,x}$?

c) Soit $x \neq 0$. On suppose que dim $F_{u,x} = m$. Montrer que la famille de vecteurs $(u^j(x) / 0 \leqslant j \leqslant m-1)$ est une base de $F_{u,x}$.

2°) On suppose, dans cette question, u cyclique. Soit x_0, un vecteur de E tel que $E = F_{u,x_0}$; $(u^j(x_0) / 0 \leqslant j \leqslant n-1)$ est donc une base de E .

a) Montrer que la famille d'endomorphismes $(u^j / 0 \leqslant j \leqslant n-1)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soient v et w, deux éléments de C(u) . Démontrer l'équivalence entre les deux propriétés :

i) $v = w$

ii) $v(x_0) = w(x_0)$

c) Montrer que $B_0 = (u^j / 0 \leqslant j \leqslant n-1)$ est une base de C(u) .

d) On pose $u^n(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^j(x_0)$.

Après avoir justifié l'existence des coefficients $(a_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$

écrire le polynôme caractéristique de u, π_u, à l'aide de ces coefficients a_j , $0 \leqslant j \leqslant n-1$,
en utilisant la base $(u^j(x_0) / 0 \leqslant j \leqslant n-1)$.

En déduire que $\pi_u(u) = 0$.

3°) $\mathcal{M}_n(K)$ désignera l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K .

Soit A, une matrice carrée d'ordre n de la forme :

$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où B et C sont carrées, d'ordres respectifs p et q ,

et où D a p lignes et q colonnes.

On se propose de démontrer que : det(A) = det(B) × det(C) . (det désignant le déterminant des matrices).

a) Soit : $M_{X,Y} = \begin{pmatrix} X & D \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n, où X et Y sont carrées d'ordre p et q respectivement.

On note $(X_1, \ldots, X_p)$, les vecteurs colonnes de X (respectivement $(Y_1, \ldots, Y_q)$, les vecteurs lignes de Y).

Montrer que les applications $\varphi \begin{pmatrix} (K^p)^p & \longrightarrow & K \\ (X_1, \ldots, X_p) & \mapsto & \det(M_{X,Y}) \end{pmatrix}$

INSTITUT NATIONAL des TELECOMMUNICATIONS
M P T - Math 1
page 203
1989 1

et $\psi \begin{pmatrix} (K^q)^q & \longrightarrow & K \\ (Y_1, \ldots, Y_q) & \mapsto & \det(M_{X,Y}) \end{pmatrix}$, $\det(M_{X,Y})$ désignant le déterminant de la matrice $M_{X,Y}$, sont respectivement des formes p-linéaires alternées et q-linéaires alternées.

b) En déduire que :

$\forall Y \in M_q(K)$, $\exists \delta(Y) \in K$, $\forall X \in M_p(K)$: $\det(M_{X,Y}) = \delta(Y) \times \det(X)$

c) Montrer que l'application $\delta \begin{pmatrix} (K^q)^q & \longrightarrow & K \\ (Y_1, \ldots, Y_q) & \mapsto & \delta(Y) \end{pmatrix}$ est q-linéaire alternée.

En déduire que : $\exists \alpha \in K$: $\forall Y \in M_q(K)$: $\delta(Y) = \alpha \det(Y)$.

d) Montrer que $\alpha = 1$ et conclure que $\det(M_{X,Y}) = \det(X) \cdot \det(Y)$.

Ecrire ce résultat pour la matrice A initiale.

4°) On suppose à nouveau que u est un endomorphisme quelconque de E .

a) Soit F un sous espace vectoriel de E stable par u (c'est-à-dire tel que $\forall y \in F$: $u(y) \in F$) . On note v l'endomorphisme de F induit par u (v est défini par : $\forall x \in F$: $v(x) = u(x)$) .

En écrivant la matrice représentative de u dans une base convenable, montrer que le polynôme caractéristique π_v de v divise le polynôme caractéristique π_u de u .

b) Soient Q_1 et Q_2, deux polynômes de K[X] . Montrer que :

$$(Q_1 Q_2)(u) = Q_1(u) \circ Q_2(u) .$$

c) Soit x, un vecteur de E, $x \neq 0$. Montrer que u induit sur $F_{u,x}$ un endomorphisme cyclique v_x .

En déduire que : $[\pi_u(u)](x) = 0$.

d) Montrer enfin que $\pi_u(u) = 0$. Sous quel nom ce résultat est-il connu ?

II - On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n-1, à coefficients réels, et du polynôme nul.

Soit Δ l'application suivante : $\Delta \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{pmatrix}$

1°)a) Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.

b) Déterminer le noyau de Δ, $\operatorname{Ker}\Delta$ et l'image de Δ, $\operatorname{Im}\Delta$.

c) Montrer que Δ est cyclique.

2°) Soit D, l'application définie par : $D \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{pmatrix}$

où P' désigne le polynôme dérivé de P .

a) Montrer que $D \in \mathcal{C}(\Delta)$.

b) En déduire que : $\exists!(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$: $D = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \cdot \Delta^j$.

c) Calculer les coefficients λ_j pour $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$.

2ème PROBLEME

Préambule :

On admettra qu'il existe une unique fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

i) $\forall x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

ii) $\Gamma(1) = 1$

iii) $\operatorname{Log}(\Gamma)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(Cette dernière propriété ne sera pas utilisée dans la suite).

Le but du problème est de déterminer les solutions d'une équation différentielle, dite équation de Bessel, qui sont développables en séries entières puis d'étudier la répartition des zéros des solutions de cette équation sur $\mathbb{R}_+$.

On admettra que, si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, si k est une fonction continue sur I, si y est une fonction de la variable t, solution non nulle sur I de l'équation différentielle $y'' + k(t)\,y = 0$, alors les zéros de y peuvent être rangés en une suite monotone finie ou une suite monotone infinie indexée par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

page 204 INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
1989 2 M P f-Math 1

I - On considère une membrane de tambour circulaire qui forme, à l'état d'équilibre, un disque de rayon a (a > 0) . On rapporte l'espace à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, O étant le centre de la membrane, $\vec{k}$, un vecteur normal au plan de la membrane.

On note u(x, y, τ), la hauteur (comptée algébriquement) du point de la membrane, M, dont la projection orthogonale m sur $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a pour coordonnées (x, y), à l'instant τ . La membrane, supposée homogène, vibre en étant soumise aux seuls efforts de tension.

On suppose u , de classe C^k , $k \geqslant 2$, dans la suite.

On admettra que u est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad \text{pour} \quad x^2 + y^2 < a^2$$

et vérifie : $u(x, y, \tau) = 0$, quel que soit $\tau \geqslant 0$, pour $x^2 + y^2 = a^2$.

(c est une constante strictement positive, caractéristique de la membrane).

1°)a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction v définie par :

$$v(r, \theta, \tau) = u(r\cos\theta, r\sin\theta, \tau) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 < r < a \ .$$

b) On cherche les solutions de la forme :

$$v(r, \theta, \tau) = v_1(r, \theta)\sin(\omega\tau) \quad , \quad \text{avec } v_1(r, \theta) = z(r)\sin(n\theta)$$

$\omega \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que z est solution de l'équation différentielle :

$$z'' + \frac{1}{r}z' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2}{r^2}\right)z = 0 \ .$$

c) On pose, pour $r > 0$: $z(r) = w\left(\frac{\omega r}{c}\right)$. Montrer que w vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle suivante, dite équation de Bessel d'ordre n :

$$(E_n) \qquad w''(t) + \frac{1}{t}w'(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)w(t) = 0$$

(Les dérivées étant prises par rapport à t) .

2°) Plus généralement, on appelle équation de Bessel d'ordre α (α > 0) l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad \frac{d^2w}{dt^2}(t) + \frac{1}{t}\frac{dw}{dt}(t) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right)w(t) = 0 \ .$$

a) Montrer qu'il existe une unique solution w de (E_α) telle que $\frac{w(t)}{t^\alpha}$ soit développable en série entière : $\frac{w(t)}{t^\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$, avec $c_0 = 1$.

Pour cela : i) Calculer c_k , en montrant que la suite (c_k) vérifie:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \qquad (k+2)(2\alpha + k + 2)\, c_{k+2} + c_k = 0$$

ii) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$.

b) On suppose, dans cette question, que $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$.

On note J_n, la solution de (E_n), équivalente à $\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n$, quand t tend vers 0, par valeurs supérieures, et qui est développable en série entière ; écrire ce développement.

c) Lorsque α n'est plus entier, montrer que la fonction J_α suivante est solution de (E_α) :

$$\forall t > 0 : \qquad J_\alpha(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \ .$$

d) Donner un équivalent de J_α au voisinage de 0^+ .

3°) On se propose, dans cette question, de montrer que toute solution de l'équation de Bessel (E_α), bornée au voisinage de 0, est proportionnelle à J_α .

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

INSTITUT NATIONAL des TELECOMMUNICATIONS
M P T-Math 1
page 205
1989 3

a) Soit w, une solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de (E_α), non proportionnelle à J_α.

<u>i)</u> On pose $\Phi = J_\alpha w' - J_\alpha' w$. Montrer que Φ vérifie, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle : $\Phi' + \frac{1}{t}\Phi = 0$.

<u>ii)</u> En déduire que Φ est proportionnelle à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$.

On pose $\Phi(t) = \frac{\lambda}{t}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(t > 0)$.

b) Montrer qu'il existe une constante $\mu \in \mathbb{R}$, un réel $\beta > 0$, tels que

$$\forall\, t \in]0, \beta[: \quad w(t) = J_\alpha(t) \left[\mu + \lambda \int_\beta^t \frac{ds}{s[J_\alpha(s)]^2} \right] .$$

$\left(\text{On pourra calculer } \left[\frac{w(t)}{J_\alpha(t)} \right]' \right)$.

c) Soient f et g, deux applications continues sur $]0, \eta]$, à valeurs positives ; $(\eta \in \mathbb{R}_+^*)$.

On suppose que $f(s) \sim g(s)$ quand s tend vers 0 par valeurs supérieures, et que les intégrales généralisées $\int_0^1 f(s)\,ds$ et $\int_0^1 g(s)\,ds$ divergent.

Montrer que : $\int_t^\eta f(s)\,ds \sim \int_t^\eta g(s)\,ds$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures.

d) Déduire de ce résultat, que $w(t) \sim -\frac{\lambda\, 2^{\alpha-1}\, \Gamma(\alpha+1)}{\alpha\, t^\alpha}$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et conclure.

4°) On revient à la fonction z introduite au I-1°)b) précédent.

<u>On admet que z reste bornée lorsque r est au voisinage de 0^+</u> .

Déduire des questions précédentes qu'il existe une constante d réelle, $d \neq 0$, telle que : $\forall\, r > 0 : \quad z(r) = d \cdot J_n\left(\frac{\omega r}{c}\right)$.

II - On se propose maintenant d'étudier les zéros des solutions de l'équation de Bessel (E_α) , $\alpha > 0$.

1°) On considère deux équations différentielles :

$(E_1) \quad y'' + s(t)\, y = 0$; $(E_2) \quad y'' + u(t)\, y = 0$.

s et u sont deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On suppose de plus, que : $\forall\, t \in I : \quad u(t) \geqslant s(t)$.

Soient y_1 et y_2, deux solutions non nulles, sur I, de (E_1) et (E_2) respectivement. On note t_1 et t_2 , deux zéros consécutifs de y_1.

Montrer que, si y_2 n'est pas proportionnelle à y_1 sur $]t_1, t_2[$, elle admet au moins un zéro sur cet intervalle.

(On pourra introduire la fonction $W_1 = y_1 y_2' - y_2 y_1'$; on supposera alors $y_1(t) > 0$ et $y_2(t) > 0$ sur $]t_1, t_2[$, et on montrera que W_1 décroît sur $]t_1, t_2[$; on conclura que $W_1 = 0$ sur $]t_1, t_2[$, puis que y_1 et y_2 sont proportionnelles sur $]t_1, t_2[$).

2°) Déduire de la question précédente, que si, sur I, on a : $s(t) \leqslant v^2$ deux zéros consécutifs d'une solution non triviale de (E_1) sont espacés d'au moins $\frac{\pi}{v}$ et que, si $s(t) \geqslant v^2$ sur I, toute solution de (E_1) a au moins un zéro dans un intervalle d'amplitude $\frac{\pi}{v}$.

3°) a) On effectue, dans l'équation de Bessel (E_α) , le changement de fonction inconnue : $b(t) = w(t)\sqrt{t}$, $t > 0$.

Montrer que b vérifie l'équation $\left(E_\alpha'\right) \quad b'' + \left(1 - \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right) b = 0$

b) Appliquer les résultats précédents pour montrer que, dans tout intervalle de $]0, +\infty[$, de longueur π , il y a au moins un zéro de w, solution de (E_α) lorsque $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, et au plus un zéro de w, solution non nulle de (E_α) , lorsque $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

4°) a) Montrer que les zéros d'une solution non nulle de (E_α) forment une suite strictement croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $\lim_{n\to+\infty} (t_n) = +\infty$

b) Montrer que :

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \quad |(t_{n+1} - t_n) - \pi| < \varepsilon$.

Interpréter ce résultat.

c) En notant $\left(u_n^{(\alpha)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des zéros de J_α , donner les valeurs du rayon r pour lesquelles la membrane reste au repos.

d) En traduisant que la périphérie de la membrane de rayon a est au repos, donner les valeurs possibles de la fréquence ω du I-1°)b)

***

page 206 1989 4 INSTITUT NATIONAL des TELECOMMUNICATIONS 9, rue Charles Fourier 91011 EVRY Cedex

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail